



**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217
- A2.** Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 15
- A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 76 μόνο η διατύπωση του θεωρήματος που βρίσκεται στο πλαίσιο.
- A4.** α) Λάθος, β) Λάθος, γ) Σωστό, δ) Λάθος, ε) Λάθος

#### ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  με
- $f'(x) = (1+x)' \cdot e^{-x} + (1+x) \cdot (e^{-x})' = e^{-x} - (1+x) \cdot e^{-x} = -xe^{-x} \leq 0$
- για κάθε  $x \geq 0$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 0$

Άρα  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και στη θέση  $x = 0$  η  $f$  παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο το  $f(0) = 1$

Η  $f'$  παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  με

$$f''(x) = (-xe^{-x})' = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1) \cdot e^{-x}, \quad x \geq 0$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot e^{-x} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↪	↯	↪

Άρα η  $f$  κοίλη στο  $[0,1]$  και κυρτή στο  $[1, +\infty)$ .

Η  $f$  για  $x=1$  παρουσιάζει καμπή και  $M\left(1, \frac{2}{e}\right)$  είναι το σημείο καμπής.

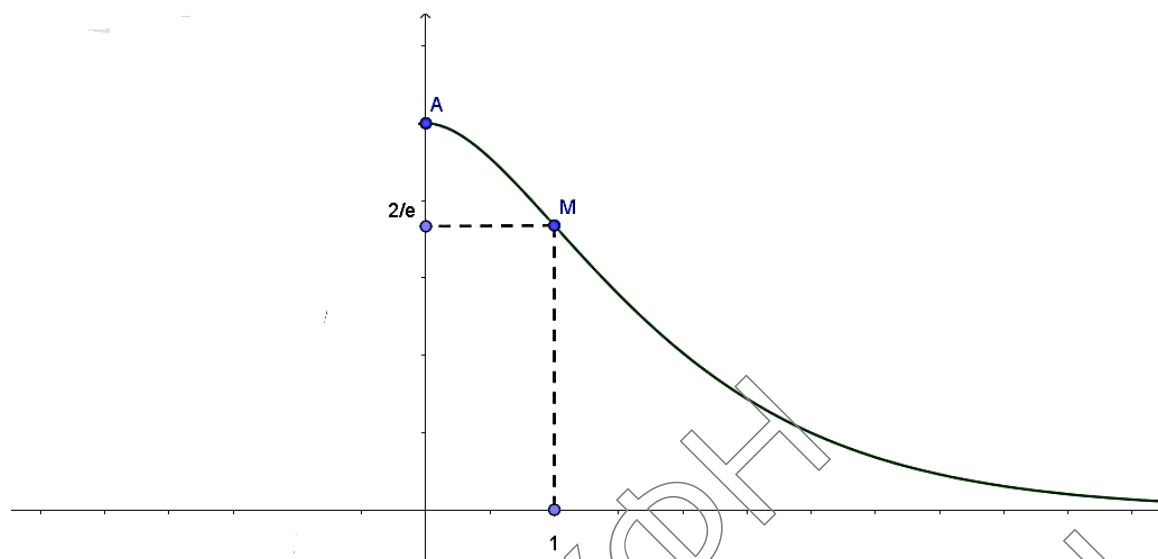
**B2.** Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x) \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{e^x}$  (μορφή  $\frac{+\infty}{+\infty}$ )

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$

Πίνακας μεταβολών της  $f$  - Γραφική παράσταση

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↪	↯	↪
	Φθίνουσα και κοίλη		Φθίνουσα και κυρτή



**B3.** Η συνάρτηση  $f \circ g$  ορίζεται όταν

$$A' = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} \neq \emptyset$$

Επομένως πρέπει

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \text{ άρα } x \geq 1$$

Άρα  $A_{f \circ g} = [1, +\infty)$  και ο τύπος της είναι:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (1+g(x)) \cdot e^{-g(x)} \\ &= (1+\ln x) \cdot e^{-\ln x} = \frac{1+\ln x}{e^{\ln x}} = \frac{1+\ln x}{x}, \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

**B4.** Το ζητούμενο εμβαδόν είναι  $E = \int_1^{\lambda} \left| \frac{1+\ln x}{x} \right| dx$

Όμως  $1+\ln x > 0$  για κάθε  $x \in [1, \lambda]$  αφού  $\ln x \geq 0$  για  $x \geq 1$

Άρα

$$E = \int_1^{\lambda} \frac{1 + \ln x}{x} dx = \int_1^{\lambda} \frac{1}{x} dx + \int_1^{\lambda} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \int_1^{\lambda} (\ln x)' dx + \frac{1}{2} \int_1^{\lambda} 2(\ln x)' \cdot \ln x dx$$

$$= [\ln x]_1^{\lambda} + \frac{1}{2} [(\ln x)^2]_1^{\lambda} = \ln \lambda + \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2, \lambda > 1$$

Πρέπει :

$$E = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln \lambda + \frac{1}{2} (\ln \lambda)^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 \ln \lambda + (\ln \lambda)^2 = 3 \Leftrightarrow (\ln \lambda)^2 + 2 \ln \lambda - 3 = 0$$

Αν  $\ln \lambda = \kappa$  έχουμε  $\kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0 \Leftrightarrow \kappa = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} \kappa = -3 \\ \kappa = 1 \end{cases}$

Άρα

$$\ln \lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = e^{-3} = \frac{1}{e^3} < 1 \text{ απορρίπτεται}$$

ή

$$\ln \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = e > 1 \text{ δεκτή.}$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Έστω  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο και  $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x) \cdot (x - x_0)$  η εξίσωση της εφαπτομένης σ' αυτό.

Η  $(\varepsilon)$  διέρχεται από το  $M(\alpha, 0)$  όταν:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (\alpha - x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0) \quad (1)$$

Είναι  $f'(x) = e^x + 1$  οπότε η (1) γράφεται:

$$-e^{x_0} - x_0 + \alpha = \alpha \cdot (e^{x_0} + 1) - x_0 (e^{x_0} + 1) \Leftrightarrow$$

$$-e^{x_0} - x_0 + \alpha = \alpha \cdot e^{x_0} + \alpha - x_0 e^{x_0} - x_0 \Leftrightarrow$$

$$-e^{x_0} - \alpha e^{x_0} + x_0 e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow (-1 - \alpha + x_0) \cdot e^{x_0} = 0$$

Άρα

$$-1 - \alpha + x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 + \alpha$$

Η  $f$  παραγωγισιμη τουλάχιστον 2 φορές στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x + 1$  και

$f''(x) = e^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως η  $f$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

Άρα η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της  $C_f$  βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $A$  δεν έχει άλλο κοινό σημείο με αυτή.

**Γ2.**

• Επειδή  $f'(x) = e^x + 1 > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x - \alpha) = 0 - \infty - \alpha = -\infty$  και

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x - \alpha) = +\infty + \infty - \alpha = +\infty$

Άρα  $f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$

Το  $0 \in f(\mathbb{R})$  και  $f$  γνησίως αύξουσα, επομένως η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Γ3.** Ισχύει  $f(x_0) = e^{x_0} + x_0 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha - x_0 = e^{x_0} > 0$  άρα  $x_0 < \alpha$ .

Έχουμε  $e^{x_0} + 1 < \frac{e^\alpha}{e^{x_0}} < e^\alpha + 1 \Leftrightarrow e^{x_0} + 1 < \frac{e^\alpha}{\alpha - x_0} < e^\alpha + 1$  (1)

Ισχύει το Θ.Μ.Τ για την  $f$  στο  $[x_0, \alpha]$  διότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  άρα και συνεχής

Επομένως υπάρχει  $\xi \in (x_0, \alpha)$  τέτοιος ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(x_0)}{\alpha - x_0} = \frac{f(\alpha)}{\alpha - x_0} = \frac{e^\alpha}{\alpha - x_0}$$

Η (1) γράφεται  $f'(x_0) < f'(\xi) < f'(\alpha)$  που ισχύει διότι  $x_0 < \xi < \alpha$  και  $f'$  γνησίως αύξουσα εφόσον η  $f$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$

**Γ4.**

**α)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(e^x) - g(\alpha - x) \leq 0$

Έστω  $h(x) = g(e^x) - g(\alpha - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Για  $x = x_0$ ,  $h(x_0) = g(e^{x_0}) - g(\alpha - x_0) = g(e^{x_0}) - g(e^{x_0}) = 0$

Άρα  $h(x) \leq h(x_0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  που σημαίνει ότι η  $h$  για  $x = x_0$  παρουσιάζει μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό και το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

Σύμφωνα με το Θ.Fermat  $h'(x_0) = 0$ .

$$h'(x) = g'(e^x) \cdot e^x + g'(a - x)$$

Άρα

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0})e^{x_0} + g'(a - x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0})e^{x_0} + g'(e^{x_0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow g'(e^{x_0})(e^{x_0} + 1) = 0 \Leftrightarrow g'(e^{x_0}) = 0 \text{ ή } e^{x_0} + 1 \neq 0$$

Επομένως η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο με τετμημένη  $x = e^{x_0}$  είναι παράλληλη στον  $x'x$ .

**β)** Αφού η  $g$  είναι κοίλη, η  $g'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .  
και  $g'(e^{x_0}) = 0$ , οπότε

- $x < e^{x_0} \Leftrightarrow g'(e^x) > g'(e^{x_0}) \Leftrightarrow g'(e^x) > 0$
- $x > e^{x_0} \Leftrightarrow g'(e^x) < g'(e^{x_0}) \Leftrightarrow g'(e^x) < 0$

Το πρόσημο της  $g'$  και η μονοτονία της  $g$  φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

$x$	$-\infty$	$e^{x_0}$	$+\infty$
$g'(x)$		○	-
$g(x)$		↗	↘

Άρα η  $g$  γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, e^{x_0}]$  και η  $g$  γνησίως φθίνουσα στο  $[e^{x_0}, +\infty)$

## ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  η ισότητα

$$\left(f(x) - \frac{x^2}{2}\right)' \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = -\eta\mu x$$

γράφεται

$$\left(e^{f(x) - \frac{x^2}{2}}\right)' = (\sigma\upsilon\upsilon x)'$$

Άρα

$$e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = \sigma\upsilon\upsilon x + c \quad (1)$$

Για  $x = 0$  η (1) γίνεται :  $e^{f(0)} = \sigma\upsilon\upsilon 0 + c \Leftrightarrow e^0 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως  $e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} = \sigma\upsilon\upsilon x$ , οπότε

$$\ln\left(e^{f(x) - \frac{x^2}{2}}\right) = \ln(\sigma\upsilon\upsilon x) \Leftrightarrow f(x) - \frac{x^2}{2} = \ln(\sigma\upsilon\upsilon x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\upsilon x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Δ2. Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  με

$$f'(x) = x + \frac{(\sigma\upsilon\upsilon x)'}{\sigma\upsilon\upsilon x} = x - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\upsilon x} = \frac{x\sigma\upsilon\upsilon x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\upsilon x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ισχύει  $f'(0) = 0$  και  $\sigma\upsilon\upsilon x > 0$  στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η  $x = 0$  είναι μοναδική ρίζα και στη συνέχεια ότι

$f'(x) > 0$  στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  και  $f'(x) < 0$  στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

- Έστω  $\varphi(x) = x \sin x - \eta \mu x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  η οποία έχει προφανή ρίζα την  $x = 0$  και είναι παραγωγίσιμη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  με

$$\varphi'(x) = \sin x - x \eta \mu x - \sigma \nu \nu x = -x \eta \mu x$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -x \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \eta \mu x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Το πρόσημο της  $\varphi'$  και η μονοτονία της  $\varphi$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	
$-x$		+	○	-
$\eta \mu x$		-	○	+
$\varphi'(x)$		-	○	-
$\varphi(x)$			↘	

- Για κάθε  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  ισχύει  $\varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$
- Για κάθε  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  ισχύει  $\varphi(0) > \varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$



Επομένως για κάθε  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  έχουμε :

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\sin x} > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi(x)}{\sin x} < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Άρα στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  η f γνησίως αύξουσα και στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  η f είναι γνησίως φθίνουσα συνεπώς η f για  $x = 0$  παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο το

$$f(0) = \ln(\sin 0) = \ln 1 = 0$$

**Σημείωση:**

Μπορούσαμε να βρούμε την  $f''(x)$ . Θεωρήσαμε τη  $\varphi(x) = x \sin x - \eta \mu x$  και βρήκαμε το πρόσημό της, το οποίο χρειάζεται στο ερώτημα Δ3.

**Δ3.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \right) = 0$

Σύμφωνα με τον κανόνα του D'Hospital έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\eta\mu x)'}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} \right]$$

Αλλά  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 0 = 1$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

και  $x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x < 0$  στο  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (ερώτημα Δ<sub>2</sub>)

οπότε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = -\infty$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$

**Δ4.** Σύμφωνα με το ερώτημα Δ<sub>2</sub> η  $f$  για  $x = 0$  παρουσιάζει μέγιστο το  $f(0) = 0$ .

Άρα για κάθε  $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$  ισχύει

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(\sigma\upsilon\nu x) \leq -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x \geq 0 \quad (1)$$

- Η  $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$  και δεν είναι παντού ίση με μηδέν, διότι η ισότητα στην (1) ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

Επομένως

$$\int_0^{\pi/6} h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} \left( e^{-\frac{x^2}{2}} - \sigma\upsilon\nu x \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu x dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > \int_0^{\pi/6} \sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/6} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > [\eta\mu x]_0^{\pi/6} = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$