



ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sin x = 0\} \text{ με } f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \text{ δηλαδή } (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Μονάδες 6

A2. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:

Αν για δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

τότε: $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως ΑΛΗΘΗ ή ΨΕΥΔΗ.

(β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο **(α)** ερώτημα.

Μονάδες 4

A3. Να γράψετε στο τετράδιο σας δίπλα από τον αντίστοιχο αριθμό το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

1. Η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = e^{x-2} + 2, x \in \mathbb{R}$ είναι:

(α) $f^{-1}(x) = \ln(x - 2) + 2, x > 2$

$$(\beta) f^{-1}(x) = \ln(x+2) + 2, x > -2$$

$$(\gamma) f^{-1}(x) = \ln(x+2) - 2, x > -2$$

2. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 3^{x^2}$ ισούται με

$$(\alpha) 2x \cdot 3^{x^2}$$

$$(\beta) x^2 \cdot 3^{x^2-1}$$

$$(\gamma) 2x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3$$

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ με $f(-1) = 3$ και $f(1) = 4$

Τότε μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι:

(α) Η μέγιστη τιμή της f το 3 και η ελάχιστη το 4.

(β) Η εξίσωση $f(x) = \pi$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 1)$.

(γ) Η f διατηρεί πρόσημο στο $[-1, 1]$.

Μονάδες 9

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε αυτό ισούται με το $f'(x_0)$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι πάντα παραγωγίσιμη στο x_0 .

3. Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται τότε ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x, x \in A$.

4. Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ με $x_0 \in A$ τότε λέμε ότι στη θέση x_0 η f παρουσιάζει μέγιστο με τιμή $f(x_0)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}, & x \neq 3 \\ k^2 - 2k + 8, & x = 3 \end{cases}$

και η συνάρτηση $h(x) = x^{2017} + x^{2019}$ με $A_h = [0, 1]$.

B1. Να αποδείξετε ότι $k = 1$ και $f(x) = x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

B2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση $h \circ f$ και ο τύπος της είναι

$$g(x) = (h \circ f)(x) = (x + 4)^{2017} + (x + 4)^{2019} \text{ με πεδίο ορισμού } A = [-4, -3].$$

Μονάδες 6

B3. (α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

Μονάδες 4

(β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in [-4, -3]$ τέτοιο ώστε:

$$2018 \cdot g(x_0) - 2035 = 0$$

Μονάδες 4

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{h \circ f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- (i) $f(0) > 1$
(ii) $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ2. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x + 4x = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα στο \mathbb{R} για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + 2$ και $g(x) = -x^2 + 2$ έχουν μόνο μια κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2) - f(-x + 2) > 4(g(x) - x) \quad \text{με } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 4

Γ4. Δυο σημεία με ίδια τετμημένη $A(x(t), y_1(t))$ και $B(x(t), y_2(t))$ κινούνται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα. Αν η τετμημένη τους x αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec να βρείτε τη θέση των σημείων για την οποία ισχύει: $y_1'(t) = 2y_2'(t) + 1$ με $t \geq 0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η πολυωνμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = 1$$

Δ1. Να δείξετε ότι:

(α) $f(1) = 1$

(β) $f'(1) = 2$

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση φείναι 2^{ου} βαθμού και ο τύπος της είναι

$$f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία έχει το ίδιο ελάχιστο με την f στην μοναδική θέση $x = \alpha$, $\alpha > 0$.

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (0, \alpha)$.

Μονάδες 8

Δ4. Αν επιπλέον ισχύει: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(g(x_0) + h) - g(g(x_0) - h)}{2h} = g'(g(x_0))$

με $x_0 \in (0, \alpha)$ τότε να δείξετε ότι η συνάρτηση g' δεν είναι αντιστρέψιμη.

Μονάδες 8