ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 8

Α2. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α .

Μονάδες 3

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη ***Σωστό***, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος***, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ η αντίστροφη, τότε ισχύει: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in A$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g : R \to \mathbb{R}$ ισχύει:
Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = 0$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ.

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους καιδεν είναι συνεχείς σε αυτό.

ε) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει καμπή, ισχύει $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(1+x)\cdot e^{-x},\ x\geq 0$.

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C της f και να σχεδιάσετε τη C.

Μονάδες 6

Β3. Αν $g(x)=\ln x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Μονάδες 4

Β4. Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x},\ x\geq 1$ και Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1,\ x=\lambda$ όπου $\lambda>1$.

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $E=\dfrac{3}{2}$ τ.μ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-\alpha$ με $x\in\mathbb{R}$ $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη(ε) διέρχεται από το σημείο $M(\alpha,0)$και στην συνέχεια να δείξετε ότι η (ε) έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την C_f.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Αν $x = x_0$ η λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ τότε:

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $e^{x_0}+1<e^{\alpha-x_0}<e^{\alpha}+1$.

Μονάδες 6

Γ4. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$$g(e^x)\le g(\alpha-x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο με τετμημένη $x=e^{x_0}$, όπου x_0 του ερωτήματος Γ2 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

β) Αν επί πλέον δίνεται ότι η g είναι κοίλη, να μελετήσετε τη μονοτονία της g.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\left(f'(x)-x\right)\cdot e^{f(x)-\frac{x^2}{2}}+\eta\mu x=0 \text{ για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \text{ και } f(0)=0,$$

τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(\sigma\upsilon\nu x), x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f για $x=0$ παρουσιάζει μοναδικό μέγιστο.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{f(x)}$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx>1$

Μονάδες 8